



TITLE:

# 透水性を有する海底起伏と表面重力波の相互干渉(流体における波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

間瀬, 肇

---

CITATION:

間瀬, 肇. 透水性を有する海底起伏と表面重力波の相互干渉(流体における波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1994, 866: 101-108

ISSUE DATE:

1994-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83940>

RIGHT:

## 透水性を有する海底起伏と表面重力波の相互干渉

京都大学工学部土木工学科

間瀬 肇 (Hajime Mase)

### 1. はじめに

多段沿岸砂洲の形成メカニズム,あるいは,多段砂洲と波との相互干渉の問題として Bragg 散乱が近年注目されている<sup>1), 2)</sup>. また, Bragg 共鳴反射を応用した高波制御法および海岸侵食制御法が研究されている<sup>3)</sup>. この場合岸側海域における透過波を減じ得たとしても, 沖側海域では反射波により波高が増大し, 不都合が生じることになる. 透過性構造物を利用して Bragg 共鳴反射を生じさせ, 透過波および反射波の両者とも低減できれば好都合である. こうした問題を取り扱うための基礎として, 本研究は波状透水層上の波動方程式を導き, この方程式を用いて Bragg 散乱に及ぼす海底地盤の透水性の影響を解析する.

### 2. 波状透水層上の波動方程式

図-1 に示すように, 不透過海底地盤上に波長のオーダーで層厚が変化する透水層が存在する場合での表面重力波を考える.  $h'(\vec{x})$  は全水深,  $h(\vec{x})$  は平均水深,  $h'_s(\vec{x})$  は全透水層厚,  $h_s(\vec{x})$  は平均透水層厚,  $\delta(\vec{x})$  は平均水深からの変動量,  $\vec{x}$  は水平座標  $(x, y)$  を表すベクトルである. すなわち,

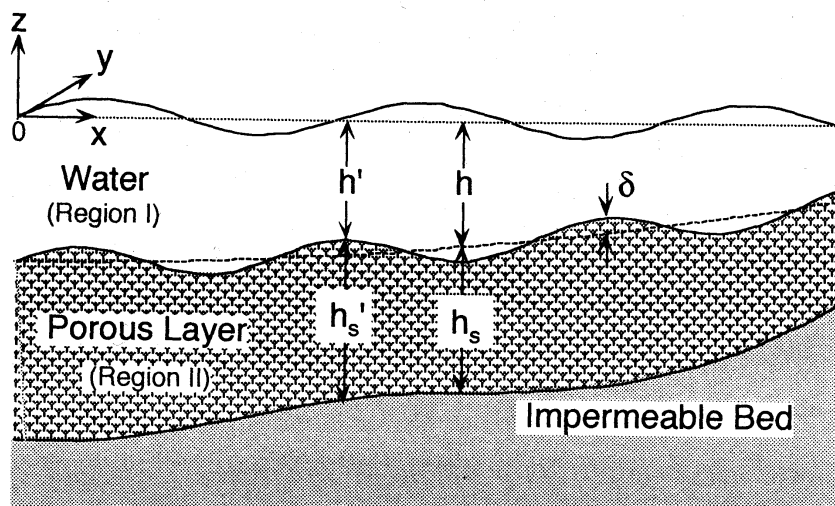


図-1 座標系の定義

$$\left. \begin{aligned} h'(\vec{x}) &= h(\vec{x}) - \delta(\vec{x}) \\ h'_s(\vec{x}) &= h_s(\vec{x}) + \delta(\vec{x}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

であり,  $h(\bar{x})$  および  $h_s(\bar{x})$  について, 以下のように緩勾配を仮定する.

$$\left. \begin{aligned} O\left(\frac{\nabla_h h}{kh}\right) &\approx O(k\delta) \ll 1 \\ O\left(\frac{\nabla_h (h+h_s)}{kh}\right) &\approx O(k\delta) \ll 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ここで,  $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  は水平勾配ベクトルである.  $\delta(\bar{x})$  の空間変動スケールに関しては

$$O\left(\frac{\nabla_h \delta}{k\delta}\right) \approx O(1) \dots\dots\dots(3)$$

のように波長のオーダーとし, 緩勾配からの急変動を考慮する.

流体層を領域 (I), 多孔質剛体の透水層を領域 (II) と区別して, 領域 (I) および (II) のそれぞれにおける基礎式および境界条件式, また領域 (I) と (II) の境界面における連続条件をもとに解を求める. ただし, ここでは線形の場合を対象とする.

流体は非粘性, 非圧縮とし, 非回転運動を考えると, 領域 (I) では以下の式が成り立つ.

$$\nabla_h^2 \phi + \phi_{zz} = 0; \quad -h \leq z \leq 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$\phi_n + g\phi_z = 0; \quad z = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$\phi_z = -\nabla_h h \cdot \nabla_h \phi + \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \phi) + w^{(I)}; \quad z = -h \dots\dots(6)$$

ここで,  $\phi$  は速度ポテンシャル,  $t$  は時間,  $g$  は重力加速度,  $w^{(I)}$  は境界面での鉛直流量流速である. 上式は,  $z = -h$  でテイラー展開した  $O(k\delta)$  までのものであり, 式(4)はラプラスの式, 式(5)は表面における運動学的境界条件と力学的境界条件から水位を消去した式, 式(6)は底面境界条件である. 流体密度を  $\rho$  として流体場の圧力は次式で表される.

$$p^{(I)} = -\rho(\phi_t + gz); \quad -h \leq z \leq 0 \dots\dots\dots(7)$$

領域 (II) における連続式および運動方程式は次のようである.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{\tau}{n} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p^{(II)} + \rho gz) - (\alpha + \beta |\vec{u}|) \vec{u} \dots\dots\dots(9)$$

ここに,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ,  $\vec{u} = (u, v, w)$  は流量流速,  $n$  は間隙率,  $\tau$  は慣性係数であり, 次のように表される.

$$\tau = 1 + \kappa(1-n) = n + C_M(1-n) \dots\dots\dots(10)$$

$\kappa$  は付加質量係数,  $C_M$  は質量係数である. 式(9)の右辺の抵抗は Dupuit-Forchheimer 型の抵抗則といわれるもので, 係数  $\alpha$  および  $\beta$  は粒径や間隙率, あるいは透水係数や乱流抵抗係数を用いて表現される. 式(9)を線形化するために線形抵抗係数  $f$  を用いて抵抗を次のように表す.

$$(\alpha + \beta |\vec{u}|) \vec{u} = f \frac{\omega}{n} \vec{u} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 $\omega$ は角周波数である。ここでは単に線形化した形を示したが、 $f$ の値はローレンツの等価仕事の原理に基づき繰り返し計算によって同定できる。

領域(II)において渦なし流れを仮定し、速度ポテンシャル $\phi$ を導入すると、式(8) および式(9)は次のように書ける。

$$\nabla_h^2 \phi + \phi_{zz} = 0 ; \quad -(h + h_s) \leq z \leq -h \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$p^{(II)} = -\rho \left( \frac{\tau}{n} \phi_t + gz + f \frac{\omega}{n} \phi \right) ; \quad -(h + h_s) \leq z \leq -h \quad \dots\dots\dots(13)$$

透水層上面および下面における境界条件は次のとおりである。

$$\phi_z = -\nabla_h h \cdot \nabla_h \phi + \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \phi) + w^{(II)} ; \quad z = -h \quad \dots\dots(14)$$

$$\phi_z = -\nabla_h (h + h_s) \cdot \nabla_h \phi ; \quad z = -(h + h_s) \quad \dots\dots\dots(15)$$

領域(I)と(II)の境界面における連続条件としては、圧力および鉛直流量流速が等しいという

$$p^{(I)} = p^{(II)} ; \quad z = -h \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$w^{(I)} = w^{(II)} ; \quad z = -h \quad \dots\dots\dots(17)$$

を用いる。

$\delta \rightarrow 0$  に対する解は

$$\phi(\vec{x}, z, t) = f^{(I)}(\vec{x}, z) \tilde{\phi}(\vec{x}, t) + \sum \text{non-propagating modes} \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$\phi(\vec{x}, z, t) = f^{(II)}(\vec{x}, z) \tilde{\phi}(\vec{x}, t) + \sum \text{non-propagating modes} \quad \dots\dots\dots(19)$$

である。ここで、 $f^{(I)}$  および  $f^{(II)}$  は、局所的に一定の水深に対する鉛直分布関数であり、次のように求められる。

$$f^{(I)} = \frac{1}{D} \{ \cosh kh_s \cosh k(h+z) + \gamma \sinh kh_s \sinh k(h+z) \} \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$f^{(II)} = \frac{1}{D} \gamma \cosh k(h + h_s + z) \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$D = \cosh kh_s \cosh kh (1 + \gamma \tanh kh_s \tanh kh) \quad \dots\dots(22)$$

$$\gamma = n / (\tau + if) \quad \dots\dots\dots(23)$$

分散関係は次式で与えられる。

$$\omega^2 = gk \frac{\tanh kh + \gamma \tanh kh_s}{1 + \gamma \tanh kh \tanh kh_s} \quad \dots\dots\dots (24)$$

いま,  $\phi = \tilde{\phi} f^{(1)}$ ,  $\varphi = \tilde{\varphi} f^{(1)}$  とおき,  $\phi$  と  $f^{(1)}$  に対するグリーンの第2定理,  $\phi$  と  $f^{(1)}$  に対するグリーンの第2定理, 圧力および鉛直流量流速の連続条件より以下の式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} (\tilde{\phi}_{tt} + \omega^2 \tilde{\phi}) - \nabla_h \cdot (\alpha \nabla_h \tilde{\phi}) - k^2 \alpha \tilde{\phi} \\ + \frac{\cosh^2 kh_s}{D^2} (1 - \gamma) \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \tilde{\phi}) = 0 \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ここで,

$$\alpha = p + \frac{q}{\gamma} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} p = \int_{-h}^0 f^{(1)2} dz = \frac{1}{4kD^2} \left\{ \cosh^2 kh_s \sinh 2kh \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right. \\ \left. + \gamma \sinh 2kh_s (\cosh 2kh - 1) + \gamma^2 \sinh^2 kh_s \sinh 2kh \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right\} \quad \dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q = \int_{-(h+h_s)}^{-h} f^{(1)2} dz = \frac{1}{4kD^2} \left\{ \gamma^2 \sinh 2kh_s \sinh 2kh \right. \\ \left. \times \left( 1 + \frac{2kh_s}{\sinh 2kh_s} \right) \right\} \quad \dots\dots (28) \end{aligned}$$

式(25)において,  $\tilde{\phi}$  の時間項を分離して

$$\tilde{\phi} = \hat{\phi} e^{-i\alpha x} \quad \dots\dots\dots (29)$$

とおくと, 式(25)は

$$\begin{aligned} \nabla_h \cdot (\alpha \nabla_h \hat{\phi}) + \alpha k^2 \hat{\phi} - \frac{\cosh^2 kh_s}{D^2} (1 - \gamma) \nabla_h \cdot (\delta \nabla_h \hat{\phi}) = 0 \\ \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

となる. 式(30)が波状透水層上の波動方程式である.

#### 4. 波状透水層上の Bragg 散乱解析

##### (1) 境界条件

式(30)において  $\hat{\phi}$  を複素振幅  $A$  で置き換える. 沖側境界, すなわち, 入射境界では水位変動は入射波と反射波の和で表され, 入射波を  $A_I$ , 反射波を  $A_R$  とすると

$$A = A_I + A_R = a_I e^{ikx} + a_R e^{-ikx} \quad \dots\dots\dots (31)$$

であり、これより反射波を消去することにより

$$A_x = -ik(A - 2A_I) \quad \dots\dots\dots(32)$$

が得られる。ここで、下付き添え字の  $x$  は微分を意味する。岸側境界では反射波は省略でき、境界条件は次式で表される。

$$A_x = ikA \quad \dots\dots\dots(33)$$

## (2) 解析条件

解析条件は、Davies and Heathershaw<sup>1)</sup> の実験条件にあわせた。図-2 に示すように、水深  $h$  および透水層厚  $h_s$  を一定とし、海底起伏を

$$\delta = D \sin(\lambda x) ; 0 \leq x \leq ml \quad \dots\dots\dots(34)$$

とする。ここに、 $m$  は砂れんの峰の数、 $\lambda$  は海底起伏の波数、 $l$  は波長を表し、 $l = 2\pi/\lambda$  である。このような条件のもとで、

- i) Case 1 として  $m=10$ ,  $D/h=0.16$ ,
- ii) Case 2 として  $m=4$ ,  $D/h=0.32$ ,
- iii) Case 3 として  $m=2$ ,  $D/h=0.32$

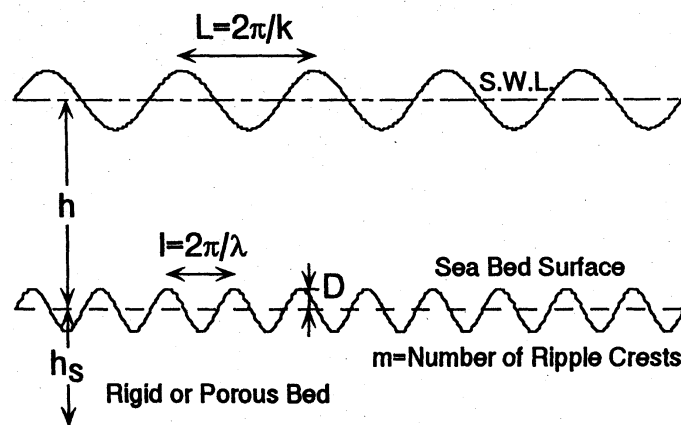
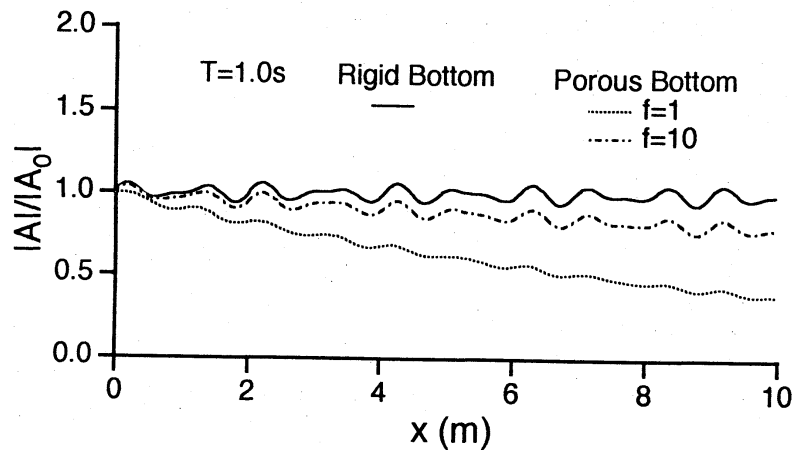


図-2 計算で対象とする地形

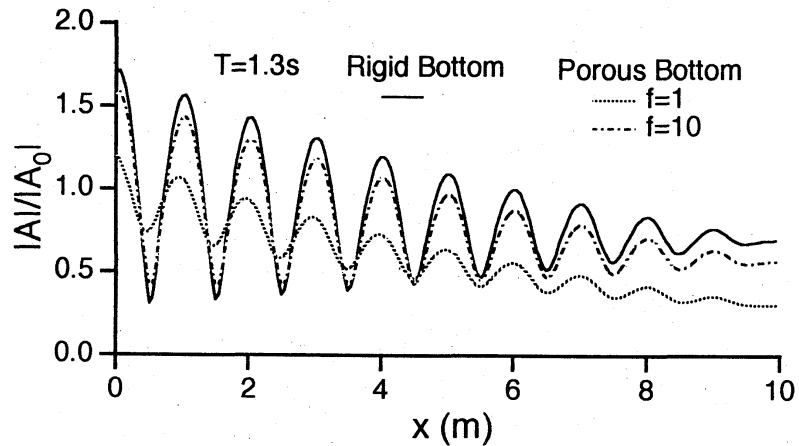
の3種類を解析対象とした。実験における実際の値は  $D=0.05\text{m}$ ,  $l=1.0\text{m}$ ,  $h_s=0\text{m}$  である。

## (3) 解析結果および考察

図-3(a) および(b) は、Case 1 において表面波の周期  $T$  を  $1.0\text{s}$  および  $1.3\text{s}$  とし、それぞれの場合について底面が不透過な場合と透水性を有する場合の波状底面上の無次元振幅の空間変化を示したものである。慣性係数  $\tau$  は  $1.0$ ，間隙率  $n$  は  $0.4$ ，透水層厚  $h_s$  は  $0.2\text{m}$  とし、抵抗係数  $f$  は  $1$  および  $10$  の2種類とした。(a)図では、 $2kl/\lambda$  は約  $1.4$ ，反射率は  $0.1$  以下である。不透過底面の場合には振幅減衰がほとんど見られないのに対し、透水性を



(a)



(b)

図-3 振幅の空間変化

有する場合は振幅が減衰し、 $f$  が小さいと振幅減衰が大きい。(b)図は、 $2|k|/\lambda$  が約1.0の共鳴反射条件を満たす場合であり、反射率が大きく重複波の形成が顕著である。不透過底面の場合には振幅の変動が大きく、振幅減衰は緩やかなのに対し、透水性底面では  $f$  が小さいと反射率が小さくなって振幅変動が小さく、また振幅減衰が大きくなる。

図-4は、横軸に  $2k/\lambda$  (透水性底面の場合には  $k$  として波数の実数部を用いる) をとり、線形抵抗係数  $f$  をパラメータとして反射率  $R$  (上段の図) および透過率  $T$  (下段の図) を示したものである。ただし、 $\tau=1.0$ ,  $n=0.4$ ,  $h_s=0.2\text{m}$  とした。図中の実線で示した結果は不透過底面のものであり、この結果は Kirby<sup>6)</sup> と同じで、ここには示していないが、実験結果とほぼ一致する。これらの図から、 $f$  が小さいと反射率および透過率がともに小さくなっていることがわかる。

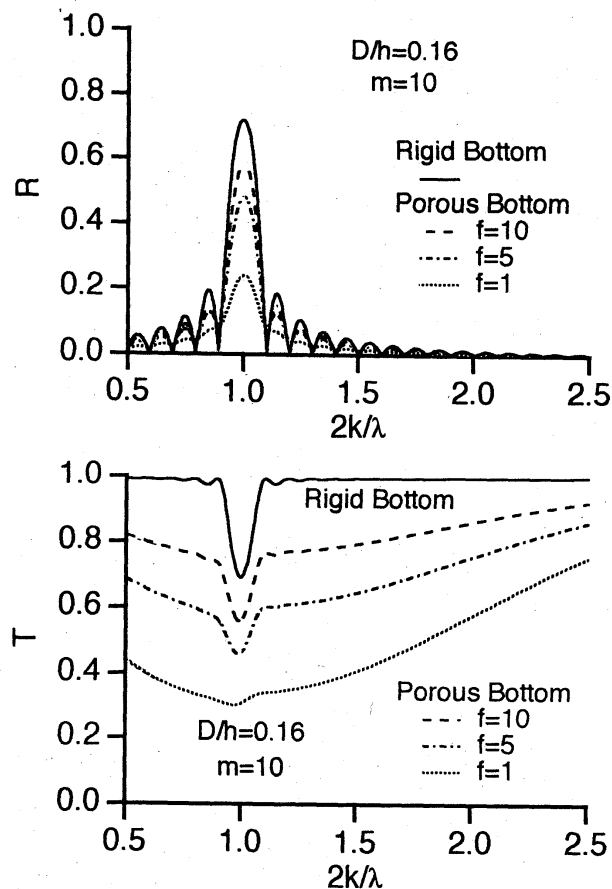


図4 反射率と透過率

## 5. あとがき

本研究では、透水層の層厚が表面重力波の波長と同オーダーで空間的に変化する海底地形と波との相互干渉を考慮できる、波状透水層上の波動方程式を導出し、この理論を断面2次元の波浪変形の解析に適用した。解析条件は Davies and Heathershaw<sup>1)</sup> の行なった水理実験条件に対応させた不透過底面の場合に加えて、透水性を有する場合を想定し、透水層厚  $h_s$ 、線形抵抗係数  $f$ 、慣性係数  $\tau$  といった透水層の条件を変化させた。

Bragg 共鳴反射は、海底が透水性を有する場合でも、海底起伏の波長が表面重力波の波長のほぼ半分の時に生じるが、透水層の抵抗係数がある値（分散関係式から求められる波数の虚数部が最大値となる時の値）までは値が小さいほど、反射率および透過率ともに不透過底面の場合に比べて減少する。また、透水層厚が大きいほど、透水層内のエネルギー散逸により、反射率および透過率がともに小さくなる。反射率および透過率に及ぼす慣性係数の影響はほとんどない。



## 参考文献

- 1) Davies, A.G. and Heathershaw, A.D.: Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography, Jour. Fluid Mech., Vol.144, pp.419-443, 1986.
- 2) Mei, C.C.: Resonant reflection of surface waves by periodic sand-bars, Jour. Fluid Mech., Vol.152, pp.315-335, 1985.
- 3) Bailard, J.A., DeVries, J.W. and Kirby, J.T.: Considerations in using Bragg reflection for storm erosion protection, Jour. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol.118, No.1, pp.62-74, 1992.